Научная статья
УДК 517.962.22
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-19-49

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Геннадий Владимирович Демиденко[1]
Анна Александровна Бондарь[2]
Мардона Шавкат кизи Ганжаева[2]

[1]Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия
[1,2,3]Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия
[1]demidenk@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0001-6338-7247
[2]anna.alex.bondar@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6311-0325
[3]m.ganzhaeva@g.nsu.ru

Аннотация

Работа посвящена нахождению ограниченных решений систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами при условии, что спектр матрицы монодромии не пересекается с единичной окружностью. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости, получены формулы решения, установлены оценки нормы решения. В частных случаях эти оценки совпадают с неравенствами Крейна.

Ключевые слова и фразы

система разностных уравнений, периодические коэффициенты, система дискретных уравнений Ляпунова, критерий экспоненциальной дихотомии, проектор Рисса.

Источник финансирования

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008))

Для цитирования

Демиденко Г.В., Бондарь А.А., Ганжаева М.Ш., Свойства решений систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 3, С. 19-49. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-19-49

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 19-49
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 19-49

Properties of solutions to systems of difference equations with periodic coefficients

[1]Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
[1,2,3]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
[1]demidenk@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0001-6338-7247
[2]anna.alex.bondar@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6311-0325
[3]anna.alex.bondar@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-6311-0325

Abstract

The paper is devoted to finding bounded solutions to systems of linear difference equations with periodic coefficients, provided that the spectrum of the monodromy matrix does not intersect with the unit circle. Theorems on unique solvability are proved, solution formulas are obtained, and estimates of the solution norm are established. In particular cases, these estimates coincide with Krein's inequalities.

Keywords

system of difference equations, periodic coefficients, system of discrete Lyapunov equations, exponential dichotomy criterion, Riesz projector.

Funding

The study was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (project no. FWNF-2022-0008)

For citation

Demidenko G. V., Bondar A. A., Ganzhaeva M. Sh., Properties of solutions to systems of difference equations with periodic coefficients // *Mat. Trudy*, 2025, Т. 28, № 3, С. 19-49. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-19-49

§ 1. Введение и постановка задачи

В работе рассматриваются системы линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}. \tag{1.1}$$

Предполагается, что матричная последовательность $\{A(n)\}$ имеет период N, т. е.

$$A(n+N) \equiv A(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 19-49
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 19-49

матрицы $A(n)$ размера $m \times m$, невырожденные, при этом системы однородных уравнений

$$x_{n+1} = A(n)x_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

экспоненциально дихотомичны (см. [1]).

Основная цель — доказательство однозначной разрешимости систем вида (1.1) в классе ограниченных последовательностей $\{x_n\}$, получение равномерных оценок норм решения.

Отметим, что исследования асимптотических свойств решений разностных уравнений были начаты более ста лет назад в работах А.Пуанкаре и О.Перрона. Однако систематическое изучение устойчивости решений разностных уравнений начались в 50-е годы прошлого столетия (см., например, [2, 3, 4]). В настоящее время этим вопросам посвящено большое число работ, имеется ряд монографий по разностным уравнениям, в которых изложены различные результаты по теории устойчивости и дихотомии (см., например, [1], [5–10]). Бóльшая часть исследований проводилась для автономных уравнений. Теория устойчивости и дихотомии для неавтономных уравнений начала изучаться позднее, и это касалось в основном уравнений с периодическими и почти-периодическими коэффициентами в линейных членах уравнений (см., например, [10–16]). В связи с этим отметим работы [14], [15] и [16], в которых были установлены новые критерии асимптотической устойчивости решений, экспоненциальной дихотомии и теоремы о возмущении коэффициентов для систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами соответственно.

В настоящей работе на основе результатов [11], [14], [15] будет установлена однозначная разрешимость задачи

$$\begin{cases} x_{n+1} = A(n)x_n + f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty, \end{cases} \tag{1.3}$$

при условии

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|f_n\| = F < \infty. \tag{1.4}$$

Будут получены формулы решения $\{x_n\}$, а также оценки норм, являющихся аналогами оценок Крейна.

§ 2. Некоторые утверждения об экспоненциальной дихотомии

Вначале напомним определение экспоненциальной дихотомии для системы линейных разностных уравнений (1.2).

Определение [1]. Система (1.2) называется *экспоненциально дихотомичной*, если все пространство C^m распадается в прямую сумму двух подпространств C^-, C^+, и выполнены условия:

а) для решений $\{x^-(n)\}$ системы таких, что $x^-(0) \in C^-$, справедливы неравенства

$$\|x^-(n)\| \le \mu_1 e^{-\nu_1(n-k)} \|x^-(k)\|, \qquad n \ge k,$$

$\mu_1, \nu_1 > 0$ — постоянные;

б) для решений $\{x^+(n)\}$ системы таких, что $x^+(0) \in C^+$, справедливы оценки

$$\|x^+(n)\| \le \mu_2 e^{-\nu_2(k-n)} \|x^+(k)\|, \qquad n \le k,$$

$\mu_2, \nu_2 > 0$ — постоянные;

в) взаимный наклон $\beta > 0$ “движущихся” подпространств

$$C^-(n) = X(n)\, C^-, \qquad C^+(n) = X(n)\, C^+, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

отделен от нуля, т. е.

$$Sn(\mathbb{C}^-(n), \mathbb{C}^+(n)) = \inf_{\substack{x_n^- \in \mathbb{C}^-(n),\ x_n^+ \in \mathbb{C}^+(n), \\ \|x_n^-\|=1,\ \|x_n^+\|=1}} \|x_n^- + x_n^+\| \ge \beta > 0,$$

где $\{X(n)\}$ — фундаментальная матрица решений системы (1.2).

Постоянные β, ν_k, μ_k, $k = 1, 2$, называются *параметрами дихотомии.* Как следует из определения, они характеризуют асимптотические свойства решений систем (1.2) на бесконечности, и поэтому представляют большой интерес. Однако, за исключением тривиальных случаев, их точное нахождение практически невозможно. Поэтому при решении конкретных задач обычно получают оценки параметров дихотомии.

При исследовании экспоненциально дихотомичных систем очень важными являются вопросы: 1) критерии дихотомии; 2) нахождение проекторов P таких, что $C^- = P\,C^m$, $C^+ = (I - P)\,C^m$; 3) нахождение оценок параметров дихотомии; 4) теоремы о возмущении и др.

Отметим, что в случае систем (1.2) с периодическими коэффициентами экспоненциальная дихотомия эквивалентна тому, что спектр матрицы монодромии не пересекается с единичной окружностью $S = \{\tau \in C : |\tau| = 1\}$. Однако несмотря на простоту формулировки спектрального критерия, его использование при решении задач о дихотомии представляет большие трудности в связи с плохой обусловленностью задачи о нахождении собственных значений не симметрических матриц. Поэтому зачастую используются другие критерии экспоненциальной дихотомии.

В настоящее время эти вопросы наиболее изучены для систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [1], [6], [8], [17]) и имеющуюся там библиографию). Для систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами задачи о дихотомии изучались в работах [15], [16].

В дальнейшем нам понадобится критерий экспоненциальной дихотомии систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами, установленный в работе [15]. Приведем формулировку этого критерия.

Теорема [15]. *Пусть $\{X(n)\}$ — матрицант системы (1.2), и предположим, что эрмитовы не отрицательно определенные матрицы C_1, C_2,..., C_N удолетворяют условию*

$$\sum_{1}^{N} C_k > 0.$$

Тогда для того, чтобы система (1.2) являлась экспоненциально дихотомичной необходимо и достаточно, чтобы существовали эрмитовы матрицы $H(0)$, $H(1)$, $\dots$, $H(N-1)$ и матрица P, являющиеся решением краевой задачи

$$\begin{cases} H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = (X^*(l))^{-1}P^*C_{l+1}P(X(l))^{-1} \\ -(X^*(l))^{-1}(I-P)^*C_{l+1}(I-P)(X(l))^{-1}, \quad l = 0, 1, ..., N-1, \\ H(0) = H(N) > 0, \\ H(0) = (I-P)^*H(0)(I-P) + P^*H(0)P, \\ X(N)P = PX(N), \quad P^2 = P. \end{cases} \tag{2.1}$$

Отметим, что этот критерий является аналогом критерия экспоненциальной дихотомии для систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами [1], а также аналогом критерия асимптотической устойчивости решений систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами [14].

Из этой теоремы вытекает следующее очень важное утверждение, используя которое, мы получим оценки решения задачи (1.3).

Следствие [15]. *Если система разностных уравнений (1.2) экспоненциально дихотомична, то существует единственное эрмитово положительно определенное N-периодическое решение системы дискретных уравне-*

ний Ляпунова

$$H(l)-A^*(l)H(l+1)A(l)=(X^*(l))^{-1}\Big(P^*X^*(l)X(l)P$$
$$-(I-P)^*X^*(l)X(l)(I-P)\Big)(X(l))^{-1},\quad l\in\mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

такое, что

$$H(0)=P^*H(0)P+(I-P)^*H(0)(I-P). \tag{2.3}$$

Решение $\{H(l)\}$ *представимо в виде*

$$H(l)=(X^*(l))^{-1}\Bigg(\sum_{j=0}^{\infty}(X^*(N))^jP^*\Big(\sum_{i=l}^{N+l-1}X^*(i)X(i)\Big)P(X(N))^j\Bigg)(X(l))^{-1}$$
$$+(X^*(l))^{-1}\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty}(X^*(N))^{-j}(I-P)^*\Big(\sum_{i=l}^{N+l-1}X^*(i)X(i)\Big)$$
$$\times(I-P)(X(N))^{-j}\Bigg)(X(l))^{-1}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем первое слагаемое справа в (2.4) будем обозначать $H^-(l)$, а второе — $H^+(l)$, т. е. формула (2.4) имеет вид

$$H(l)=H^-(l)+H^+(l),\quad l\in\mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

§ 3. Системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы рассмотрим задачу (1.3) в случае, когда система (1.1) имеет постоянные коэффициенты, и докажем известную теорему об однозначной разрешимости этой задачи (см., например, [1], [17]). Однако мы предложим другой способ доказательства, основанный на специальном выборе начального вектора x_0. В следующем параграфе, используя этот способ, мы докажем однозначную разрешимость задачи (1.3) для систем с периодическими коэффициентами.

Теорема 1. *Пусть система разностных уравнений (1.1) имеет постоянные коэффициенты, т. е.* $A(n)\equiv A$, *и спектр невырожденной матрицы* A *не пересекается с единичной окружностью* $S=\{\tau\in C:\ |\tau|=1\}$. *Тогда для любой ограниченной последовательнности* $\{f_n\}$ *задача (1.3) имеет единственное решение.*

Доказательство. При решении поставленной задачи рассмотрим 3 случая:

1) Собственные значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ матрицы A такие, что

$$|\tau_j| < 1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. спектр матрицы принадлежит единичному кругу

$$B(0,1) = \{\tau \in \mathbf{C} : \ |\tau| < 1\}.$$

2) Собственные значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ матрицы A такие, что

$$|\tau_j| > 1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. спектр матрицы лежит вне единичного круга $\bar{B}(0,1)$.

3) Часть собственных значений $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ матрицы A принадлежит единичному кругу $B(0,1)$, а часть собственных значений $\tau_{\mu+1}, \ldots, \tau_m$ лежит вне единичного круга $\bar{B}(0,1)$.

При рассмотрении **первого случая** напомним, что спектр матрицы A принадлежит единичному кругу $B(0,1)$ тогда и только тогда, когда *дискретное уравнение Ляпунова*

$$H - A^* H A = C, \quad C = C^* > 0, \tag{3.1}$$

имеет решение $H = H^* > 0$ (см., например, [1]).

Отметим, что, имея решение $H = H^* > 0$ уравнения (3.1) при $C = I$, можно доказать *оценку Крейна*

$$\|A^k\| \le \sqrt{\nu(H)} \left(1 - \frac{1}{\|H\|}\right)^{k/2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+ = \{k = 0, 1, 2, \ldots\}, \tag{3.2}$$

где $\nu(H) = \|H\| \|H^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы H.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.1):

$$x_0 = b. \tag{3.3}$$

Как известно, для любого числового вектора $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ задача (1.1), (3.3) имеет единственное решение $\{x_n\}$.

Выясним, при каких начальных условиях (3.3) существуют **ограниченные** решения $\{x_n\}$ системы (1.1) при $n \in \mathbb{Z}$.

Вначале пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, при любом начальном векторе b решение $\{x_n\}$ задачи (1.1), (3.3) имеет вид

$$x_n = A^n b + A^{n-1} f_0 + A^{n-2} f_1 + \ldots + A f_{n-2} + f_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.4}$$

Учитывая эту формулу и условие ограниченности (1.4) последовательности $\{f_n\}$, имеем неравенство

$$\|x_n\| \le \|A^n\|\|b\| + F\sum_{j=0}^{n-1}\|A^{n-j-1}\|, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\|f_j\| \le F$. Тогда в силу оценки Крейна (3.2) получаем

$$\|x_n\| \le \sqrt{\nu(H)}\left(1-\frac{1}{\|H\|}\right)^{n/2}\|b\| + \sqrt{\nu(H)}F\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{\|H\|}\right)^{(n-j-1)/2}.$$

А поскольку

$$q = \left(1-\frac{1}{\|H\|}\right)^{1/2} < 1,$$

то

$$\|x_n\| \le \sqrt{\nu(H)}\left(q^n\|b\| + \frac{1-q^n}{1-q}F\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что для любого начального вектора $x_0 = b$ решение $\{x_n\}$ задачи (1.1), (3.3) при $n \in \mathbb{Z}_+$ является ограниченным.

Пусть теперь $n \in \mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \ldots\}$. Выписывая последовательно, для любого отрицательного n нетрудно получить формулу

$$x_n = A^n\left(b - f_{-1} - Af_{-2} - \ldots - A^{-n-1}f_n\right) \tag{3.5}$$

или

$$x_n = A^{-|n|}\left(b - f_{-1} - Af_{-2} - \ldots - A^{|n|-1}f_{-|n|}\right).$$

Перепишем последнюю формулу в следующем виде

$$A^{|n|}x_n = b - f_{-1} - Af_{-2} - \ldots - A^{|n|-1}f_{-|n|}. \tag{3.6}$$

Учитывая, что решение должно быть ограниченным, а также неравенство Крейна (3.2), имеем

$$\|A^{|n|}\| \le \sqrt{\nu(H)}\left(1-\frac{1}{\|H\|}\right)^{|n|/2} \to 0, \quad |n| \to \infty.$$

Но тогда правая часть формулы (3.6) также стремится к нулю при $|n| \to \infty$. Поэтому начальный вектор b должен иметь вид

$$b = f_{-1} + Af_{-2} + A^2f_{-3} + \ldots = \sum_{-\infty}^{0} A^{|j|}f_{-|j|-1}. \tag{3.7}$$

Следовательно, подставляя b в (3.5), при отрицательных n получаем

$$x_n = \sum_{-\infty}^{n} A^{n-j} f_{j-1}. \tag{3.8}$$

Подставляя теперь вектор b из (3.7) в (3.4), при положительных n также получим формулу (3.8).

Итак, в первом случае, если $\{x_n\}$ является ограниченным решением системы (1.1), то необходимо, чтобы вектор в начальном условии (3.3) имел вид (3.7), а это эквивалентно тому, чтобы решение системы имело вид (3.8).

Нетрудно показать, что решение $\{x_n\}$, представимое в виде (3.8), является ограниченным. Действительно, из (3.8) при любом n выполнено неравенство

$$\|x_n\| \leq \sum_{-\infty}^{n} \|A^{n-j}\| \|f_{j-1}\| \leq F \sum_{-\infty}^{n} \|A^{n-j}\|.$$

Отсюда в силу оценки Крейна имеем

$$\|x_n\| \leq F\sqrt{\nu(H)} \sum_{-\infty}^{n} \left(1 - \frac{1}{\|H\|}\right)^{(n-j)/2} \leq F\sqrt{\nu(H)} \frac{1}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Из проведенных рассуждений мы получили явную формулу (3.8) ограниченного решения системы (1.1), а поскольку соответствующий начальный вектор $x_0 = b$ определяется единственным образом, то существует только одно ограниченное решение.

Теорема для случая 1 доказана.

Рассмотрим **второй случай.**

Вначале перепишем дискретное уравнение Ляпунова (3.1) в следующем виде

$$H - (A^{-1})^* H A^{-1} = -(A^{-1})^* C A^{-1}. \tag{3.10}$$

По условию спектр матрицы A лежит вне единичного круга $\bar{B}(0,1)$, поэтому спектр матрицы A^{-1} принадлежит единичному кругу $B(0,1)$. Следовательно, уравнение Ляпунова (3.10) при $C = C^* < 0$ имеет единственное решение $H = H^* > 0$. Возьмем теперь матрицу $C = C^* < 0$ в виде

$$C = -A^* A,$$

и рассмотрим решение $\hat{H} = \hat{H}^* > 0$ уравнения (3.10). Тогда из оценки Крейна (3.2) вытекает неравенство

$$\|A^{-k}\| \leq \sqrt{\nu(\hat{H})} \left(1 - \frac{1}{\|\hat{H}\|}\right)^{k/2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.11}$$

По аналогии с первым случаем, используя неравенство (3.11), мы выясним, при каких начальных условиях (3.3) существуют **ограниченные** решения $\{x_n\}$ системы (1.1).

Вначале перепишем систему уравнений (1.1) в следующем виде

$$A^{-1}x_{n+1} = x_n + A^{-1}f_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

Пусть вначале $n \in \mathbb{Z}_-$. Тогда из (3.12) при $n = -1$ имеем

$$A^{-1}x_0 = x_{-1} + A^{-1}f_{-1},$$

т. е.

$$x_{-1} = A^{-1}b - A^{-1}f_{-1}.$$

Аналогично при $n = -2$

$$x_{-2} = A^{-2}b - A^{-2}f_{-1} - A^{-1}f_{-2}.$$

Выписывая последовательно, для любого отрицательного n нетрудно получить формулу

$$x_n = A^{-|n|}b - A^{-|n|}f_{-1} - A^{-|n|+1}f_{-2} - \ldots - A^{-1}f_n, \quad n \in \mathbb{Z}_-. \tag{3.13}$$

Учитывая эту формулу и ограниченность последовательности $\{f_n\}$, имеем неравенство

$$\|x_n\| \leq \|A^{-|n|}\|\|b\| + F\Bigg(\|A^{-|n|}\| + \|A^{-|n|+1}\| + \ldots + \|A^{-1}\|\Bigg), \quad n \in \mathbb{Z}_-.$$

Тогда в силу оценки Крейна (3.11) получаем

$$\|x_n\| \leq \sqrt{\nu(\hat{H})}\left(1 - \frac{1}{\|\hat{H}\|}\right)^{|n|/2}\|b\| + \sqrt{\nu(\hat{H})}F\sum_{j=1}^{|n|}\left(1 - \frac{1}{\|\hat{H}\|}\right)^{(|n|-j+1)/2}.$$

А поскольку

$$\hat{q} = \left(1 - \frac{1}{\|\hat{H}\|}\right)^{1/2} < 1,$$

то

$$\|x_n\| \leq \sqrt{\nu(\hat{H})}\left(\hat{q}^{|n|}\|b\| + \frac{1}{1-\hat{q}}F\right), \quad n \in \mathbb{Z}_-.$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что для любого начального вектора $x_0 = b$ решение $\{x_n\}$ задачи (1.1), (3.3) при $n \in \mathbb{Z}_-$ является ограниченным.

Пусть теперь $n \in Z_+$. Как мы знаем, при любом начальном векторе b для решения задачи (1.1), (3.3) имеем формулу (3.4). Перепишем ее в виде

$$x_n = A^n \Big(b + A^{-1} f_0 + A^{-2} f_1 + \ldots + A^{-n} f_{n-1} \Big).$$

Отсюда

$$A^{-n} x_n = b + A^{-1} f_0 + A^{-2} f_1 + \ldots + A^{-n} f_{n-1}. \tag{3.14}$$

Учитывая, что решение должно быть ограниченным, а также свойство

$$\|A^{-n}\| \le \sqrt{\nu(\hat{H})} \Big(1 - \frac{1}{\|\hat{H}\|} \Big)^{n/2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

которое вытекает из неравенства Крейна (3.11), имеем

$$\|A^{-n} x_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда получаем, что правая часть из (3.14) также должна стремиться к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, начальный вектор b должен иметь вид

$$b = -A^{-1} f_0 - A^{-2} f_1 - \ldots = -\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} f_{j-1}. \tag{3.15}$$

Подставляя начальный вектор в формулу (3.4), при положительных n получаем

$$x_n = -\sum_{j=n+1}^{\infty} A^{n-j} f_{j-1}. \tag{3.16}$$

Подставляя теперь вектор b из (3.15) в (3.13), при положительных n также получим формулу (3.16).

Итак, во втором случае, если $\{x_n\}$ является ограниченным решением системы (1.1), то необходимо, чтобы вектор в начальном условии (3.3) имел вид (3.15), а это эквивалентно тому, чтобы решение системы имело вид (3.16).

Нетрудно показать, что решение $\{x_n\}$, представимое в виде (3.16) является ограниченным. Действительно, из (3.16) при любом n выполнено неравенство

$$\|x_n\| \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \|A^{n-j}\| \|f_{j-1}\| \le F \sum_{j=n+1}^{\infty} \|A^{n-j}\|.$$

Отсюда в силу оценки Крейна (3.11) имеем

$$\|x_n\| \leq F\sqrt{\nu(\hat{H})}\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\|\hat{H}\|}\right)^{(n-j)/2} \leq F\sqrt{\nu(\hat{H})}\frac{1}{1-\hat{q}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.17)$$

Из проведенных рассуждений мы получили явную формулу (3.16) ограниченного решения системы (1.1), а поскольку соответствующий начальный вектор $x_0 = b$ определяется единственным образом, то существует только одно ограниченное решение.

Теорема для случая 2 доказана.

Рассмотрим теперь **третий случай.**

Пусть μ собственных значений матрицы A принадлежат единичному кругу, а $(m-\mu)$ собственных значений принадлежат внешности единичного круга. Тогда существует невырожденная матрица T такая, что

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{pmatrix},$$

где A_- — матрица размера $\mu \times \mu$, при этом ее спектр принадлежит единичному кругу, т. е.

$$|\tau_j| < 1, \quad j = 1, \ldots, \mu,$$

A_+ — матрица размера $(m-\mu)\times(m-\mu)$, при этом ее спектр принадлежит внешности единичного круга, т. е.

$$|\tau_k| > 1, \quad k = (\mu+1), \ldots, m.$$

Используя матрицу T, мы сведем изучение задачи (1.3) к решению двух задач, которые уже умеем решать.

Действительно, будем искать решение задачи (1.3) в виде $x_n = Ty_n$. Тогда в силу невырожденности матрицы T для нахождения вектор-функции y_n получаем следующую задачу

$$\begin{cases} y_{n+1} = \begin{pmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{pmatrix} y_n + T^{-1}f_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\|y_n\| < \infty. \end{cases} \quad (3.18)$$

Очевидно, задачи (1.3) и (3.18) эквивалентные.

Задача (3.18) разбивается на две задачи:

$$y^-_{n+1} = A_- y^-_n + h^-_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n^-\| < \infty.$$

и

$$y_{n+1}^+ = A_+ y_n^+ + h_n^+, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n^+\| < \infty.$$

Каждую из этих задач мы умеем решать, при этом имеются явные формулы

$$y_n^- = \sum_{-\infty}^{n} A_-^{n-j} h_{j-1}^-, \qquad y_n^+ = -\sum_{n+1}^{\infty} A_+^{n-j} h_{j-1}^+.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ вектор-функций

$$x_n = T y_n = T \begin{pmatrix} y_n^- \\ \\ y_n^+ \end{pmatrix}$$

является единственным решением задачи (1.3), и для нее выполняется оценка вида

$$\|x_n\| \le c\,F,$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от n и $\{f_k\}$.

Перепишем полученную формулу решения задачи в более простом виде, используя проектор P на максимальное инвариантное подпространство относительно A, соответствующее собственным значениям, лежащим в единичном круге.

Имеем

$$x_n = T \begin{pmatrix} y_n^- \\ \\ y_n^+ \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \sum\limits_{-\infty}^{n} A_-^{n-j} h_{j-1}^- \\ \\ -\sum\limits_{n+1}^{\infty} A_+^{n-j} h_{j-1}^+ \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{-\infty}^{n} T \begin{pmatrix} A_-^{n-j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} f_{j-1} - \sum_{n+1}^{\infty} T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_+^{n-j} \end{pmatrix} T^{-1} f_{j-1}$$

$$= \sum_{-\infty}^{n} T \begin{pmatrix} A_-^{n-j} & 0 \\ 0 & A_+^{n-j} \end{pmatrix} T^{-1} T \begin{pmatrix} I_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} f_{j-1}$$

$$- \sum_{n+1}^{\infty} T \begin{pmatrix} A_-^{n-j} & 0 \\ 0 & A_+^{n-j} \end{pmatrix} T^{-1} T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_+ \end{pmatrix} T^{-1} f_{j-1}.$$

Учитывая теперь, что проектор P можно записать в виде

$$P = T\begin{pmatrix} I_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

(см., например, [13]), решение задачи (1.3) можно записать в следующем виде

$$x_n = \sum_{-\infty}^{n} A^{n-j}T\begin{pmatrix} I_- & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}f_{j-1} - \sum_{n+1}^{\infty} A^{n-j}T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_+ \end{pmatrix}T^{-1}f_{j-1}$$

$$= \sum_{-\infty}^{n} A^{n-j}Pf_{j-1} - \sum_{n+1}^{\infty} A^{n-j}(I-P)f_{j-1}.$$

Теорема доказана.

§ 4. Системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами

Рассмотрим теперь систему (1.1) с периодическими коэффициентами с периодом $N > 1$. Используя схему рассуждений из предыдущего параграфа, мы докажем однозначную разрешимость задачи (1.3).

Теорема 2. *Пусть система разностных уравнений (1.2) экспоненциально дихотомична. Тогда для любой ограниченной последовательнности* $\{f_n\}$ *задача (1.3) имеет единственное решение.*

Доказательство. Как уже отмечалось, согласно спектральному критерию экспоненциальная дихотомия системы (1.2) эквивалентна тому, что спектр матрицы монодромии $\bar{X}$ не пересекается с единичной окружностью S. Поэтому для доказательства теоремы нужно рассмотреть 3 случая:

1) Собственные значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ матрицы монодромии $\bar{X}$ такие, что

$$|\tau_j| < 1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. спектр матрицы монодромии принадлежит единичному кругу $B(0,1)$.

2) Собственные значения $\tau_1, \ldots, \tau_m$ матрицы монодромии $\bar{X}$ такие, что

$$|\tau_j| > 1, \quad j = 1, \ldots, m,$$

т. е. спектр матрицы монодромии лежит вне единичного круга $\bar{B}(0,1)$.

3) Часть собственных значений $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ матрицы монодромии $\bar{X}$ принадлежит единичному кругу $B(0,1)$, а часть собственных значений $\tau_{\mu+1}, \ldots, \tau_m$ лежит вне единичного круга $\bar{B}(0,1)$.

При рассмотрении **первого случая** напомним, что спектр матрицы монодромии $\bar{X}$ принадлежит единичному кругу $B(0,1)$ тогда и только тогда, когда *дискретное уравнение Ляпунова*

$$H - \bar{X}^* H \bar{X} = C, \quad C = C^* > 0, \tag{4.1}$$

имеет решение $H = H^* > 0$. Отметим также, что, если $H = H^* > 0$ — решение уравнения (4.1) при $C = I$, то справедлива *оценка Крейна*

$$\|\bar{X}^k\| \le \sqrt{\nu(H)}\left(1 - \frac{1}{\|H\|}\right)^{k/2}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{4.2}$$

где $\nu(H) = \|H\|\|H^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы H.

В дальнейшем при построении решений системы разностных уравнений (1.1) будем использовать фундаментальную матрицу решений $\{X(n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, как решение следующей начальной задачи для матричного уравнения

$$X(n+1) = A(n)X(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$X(0) = I.$$

Такую фундаментальную матрицу решений часто называют *матрицантом.*

Вычисляя последовательно, можно выписать все матрицы $X(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. В частности, если $n = kN + l$, $0 \le l \le N-1$, то получим

$$X(n) = X(l)\bar{X}^k,$$

где $\bar{X} = A(N-1)A(N-2)\cdots A(0)$ — матрица монодромии.

Применяя метод вариации постоянной, решение начальной задачи (1.1), (3.3) можно записать в виде

$$x_n = X(n)b + X(n)\Big(X^{-1}(1)f_0 + X^{-1}(2)f_1$$

$$+ \ldots + X^{-1}(n-1)f_{n-2} + X^{-1}(n)f_{n-1}\Big), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.3}$$

Тогда, используя неравенство Крейна (4.2) и условие ограниченности (1.4), для решения $\{x_n\}$ начальной задачи (1.1), (3.3) при любом начальном векторе b нетрудно получить оценку

$$\|x_n\| \le \|X(l)\|\sqrt{\nu(H)}\left(q^k\|b\| + d\frac{1-q^k}{1-q}F\right), \tag{4.4}$$

$$n = kN + l, \quad k \geq 1, \quad l \geq 0,$$

где

$$q = \left(1 - \frac{1}{\|H\|}\right)^{1/2} < 1,$$

$$d = 1 + \|X^{-1}(1)\| + \|X^{-1}(2)\| + \ldots + \|X^{-1}(N-1)\|.$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{Z}_-$. Выведем формулу решения задачи (1.1), (3.3) при таких n.

Если $n = -1$, то из системы имеем

$$x_0 = A(-1)x_{-1} + f_{-1}.$$

Отсюда

$$x_{-1} = A^{-1}(-1)b - A^{-1}(-1)f_{-1} = A^{-1}(-1)\Big(b - f_{-1}\Big).$$

Если $n = -2$, то имеем

$$x_{-1} = A(-2)x_{-2} + f_{-2}.$$

Отсюда

$$x_{-2} = A^{-1}(-2)A^{-1}(-1)\Big(b - f_{-1} - A(-1)f_{-2}\Big).$$

Выписывая последовательно, для любого отрицательного n нетрудно получить формулу

$$\begin{gathered} x_n = A^{-1}(n)A^{-1}(n+1)A^{-1}(n+2)...A^{-1}(-1)b \\ -A^{-1}(n)A^{-1}(n+1)A^{-1}(n+2)...A^{-1}(-1)f_{-1} \\ -A^{-1}(n)A^{-1}(n+1)A^{-1}(n+2)...A^{-1}(-2)f_{-2} - \ldots \\ -A^{-1}(n)A^{-1}(n+1)f_{n+1} - A^{-1}(n)f_n. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Тогда, используя формулу для матриканта, имеем

$$x_n = X(n)\Big(b - f_{-1} - A(-1)f_{-2} - A(-1)A(-2)f_{-3}$$

$$- \ldots - A(-1)A(-2)...A(n+2)f_{n+1} - A(-1)A(-2)...A(n+2)A(n+1)f_n\Big).$$

Отсюда

$$x_n = X(n)\Big(b - \sum_{k=n}^{-1} X^{-1}(k+1)f_k\Big).$$

Следовательно, учитывая, что

$$\|X^{-1}(n)\| \to \infty, \quad n \to \infty,$$

и решение $\{x_n\}$ должно быть ограниченным, получаем, что начальный вектор должен иметь вид

$$b = \sum_{k=-\infty}^{-1} X^{-1}(k+1) f_k.$$

Тогда для решения получаем формулу

$$x_n = \sum_{j=-\infty}^{n-1} X(n) X^{-1}(j+1) f_j, \quad n \in \mathbb{Z}_-. \tag{4.6}$$

Покажем ограниченность последовательности $\{x_n\}$, представленной в виде (4.6).

Запишем $n \in \mathbb{Z}_-$ в виде

$$n = kN + l, \quad k \in \mathbb{Z}_-, \quad -N+1 \le l \le 0.$$

Пусть $k \le -2$, тогда

$$X(n) = \Big([A(-1)A(-2)\dots A(-N)][A(N-1)A(N-2)\dots A(-2N)] \times \dots$$

$$\times [A((|k|+1)N-1)A((|k|+1)N-2)A(|k|N)]$$

$$[A(|k|N-1)\dots A(|k|N-|l|)] \Big)^{-1}.$$

Учитывая периодичность матриц $A(n)$, имеем

$$A(-1)A(-2)\dots A(-N) = A(N-1)A(N-2)\dots A(0) = \bar{X}.$$

Отсюда получаем

$$[A(-1)A(-2)\dots A(-N)][A(N-1)A(N-2)\dots A(-2N)]$$

$$\times \dots \times [A((|k|+1)N-1)A((|k|+1)N-2)A(|k|N)] = \bar{X}^{|k|}.$$

Следовательно,

$$X(n) = \Big(\bar{X}^{|k|} \times [A(-1)\dots A(-|l|)] \Big)^{-1} = X^{-1}(l)\bar{X}^{-|k|}. \tag{4.7}$$

Перепишем теперь формулу решения (4.6), учитывая запись для матрицанта при $n \in \mathbb{Z}_-$ в виде (4.7). Пусть

$$j+1 = pN + q, \quad p \in \mathbb{Z}_-, \quad -N+1 \le q \le 0.$$

Тогда

$$X(n)X^{-1}(j+1) = X^{-1}(l)\bar{X}^{-|k|}\bar{X}^{|p|}X(q).$$

Учитывая оценки

$$\|X(n)X^{-1}(j+1)\| \le \|X^{-1}(l)\|\|\bar{X}^{|p|-|k|}\|\|X(q)\|,$$

$$|k| \le |p|, \quad -N+1 \le l \le 0, \quad -N+1 \le q \le 0,$$

а также

$$\|X^{-1}(l)\| = \|A(-1)\|\|A(-2)\| \dots \|A(l)\| \le \alpha^{|l|},$$
$$\|X(q)\| = \|A^{-1}(-|q|)\|\|A^{-1}(-|q|+1)\| \dots \|A^{-1}(-1)\| \le \beta^{|q|},$$

где

$$\alpha = \max_{j=0,\dots,N-1} \|A(j)\|, \qquad \beta = \max_{i=0,\dots,N-1} \|A^{-1}(i)\|,$$

получаем неравенство для нормы решения

$$\|x_n\| \le F \sum_{p=-\infty}^{k} \|X^{-1}(l)\|\|\bar{X}^{|p|-|k|}\| \Big(\|X(0\| + \|X(-1)\| + \ldots + \|X(-N+1)\|) \Big)$$

$$\le F\alpha^{|l|} \Big(1 + \beta + \ldots + \beta^{N-1} \Big) \sum_{p=-\infty}^{k} \|\bar{X}^{|p|-|k|}\|.$$

Применяя теперь неравенство Крейна и учитывая условие (1.4), также как при получении оценки (4.4), получаем

$$\|x_n\| \le F\alpha^{|l|} \frac{\beta^N - 1}{\beta - 1} \frac{\sqrt{\nu(H)}}{1-q}. \tag{4.8}$$

Из неравенств (4.4), (4.8) получаем ограниченность построенного решения системы (1.1), при этом оно определяется единственным образом, поскольку при его построении соответствующий начальный вектор b определялся единственным образом.

Теорема для случая 1 доказана.

Рассмотрим **второй случай.**

В силу невырожденности матриц $A(n)$ задачу (1.3) можно переписать в эквивалентном виде

$$x_n = A^{-1}(n)x_{n+1} - A^{-1}(n)f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.9}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty. \tag{4.10}$$

Сделаем замену $k = -n$, т. е.

$$x_n = x_{-k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и введем последовательности векторов $\{\hat{x}_k\}$, $\{\hat{f}_k\}$ и последовательность матриц $\{\hat{A}(k)\}$:

$$\hat{x}_k = x_{-k}, \quad \hat{f}_k = -A^{-1}(-(k+1))f_{-(k+1)}, \quad \hat{A}(k) = A^{-1}(-(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда задачу (4.9), (4.10) можно переписать следующим образом

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}(k)\hat{x}_k + \hat{f}_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.11}$$

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|\hat{x}_k\| < \infty. \tag{4.12}$$

В силу условий на матричную последовательность $\{A(n)\}$ и векторную последовательность $\{f_n\}$ имеем

$$\hat{A}(N+k) = \hat{A}(k), \quad \|\hat{f}_k\| \le \|A^{-1}(-(k+1))\|\|f_{-(k+1)}\| \le \beta F, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вычислим теперь матрицу монодромии $\hat{X}$ для системы (4.11). По определению имеем

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \hat{A}(N-1)\hat{A}(N-2)\dots\hat{A}(1)\hat{A}(0)\\ &= A^{-1}(-N)A^{-1}(-(N-1))\dots A^{-1}(-2)A^{-1}(-1)\\ &= (A(-1)A(-2)\dots A(-(N-1))A(-N))^{-1}\\ &= (A(N-1)A(N-2)\dots A(1)A(0))^{-1},\end{aligned}$$

т. е. $\hat{X} = \bar{X}^{-1}$. Следовательно, числа

$$(\tau_1)^{-1}, \dots, (\tau_m)^{-1}$$

представляют спектр матрицы монодромии $\hat{X}$. Но тогда все собственные значения матрицы монодромии системы (4.11) лежат внутри единичного круга $B(0,1)$. Поэтому для задачи (4.11), (4.12) выполнены все условия, как для задачи (1.3) в случае 1, для которого теорема уже доказана.

Из сказанного вытекает справедливость теоремы для случая 2, при этом формула решения задачи (1.3) будет иметь вид

$$x_n = -\sum_{j=n}^{\infty} X(n)X^{-1}(j+1)f_j, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$

Рассмотрим теперь **третий случай**.

Поскольку часть собственных значений $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ матрицы монодромии $\bar{X}$ принадлежит единичному кругу $B(0,1)$, а часть собственных значений $\tau_{\mu+1}, \ldots, \tau_m$ лежит вне единичного круга $CB(0,1) = \{\tau : \ |\tau| > 1\}$, то существует невырожденная матрица T такая, что матрицу $\bar{X}$ можно представить в следующем виде

$$\bar{X} = T \begin{pmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{pmatrix} T^{-1},$$

где спектры матриц A_- и A_+ принадлежат $B(0,1)$ и $CB(0,1)$ соответственно. Поэтому, сделав замену

$$\{x_n\} = \{Tz_n\}, \quad \hat{A}(n) = T^{-1}A(n)T, \quad g_n = T^{-1}f_n, \quad \hat{b} = T^{-1}b,$$

сведём задачу (1.3), (3.3) к рассмотрению эквивалентной задачи

$$z_{n+1} = \hat{A}(n)z_n + g_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$z_0 = \hat{b},$$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|z_n\| < \infty.$$

Повторяя теперь аналогичные рассуждения из доказательства теоремы 1, нетрудно получить следующую формулу решения задачи (1.3)

$$x_n = \sum_{-\infty}^{n-1} X(n)PX^{-1}(j+1)f_j - \sum_{j=n}^{\infty} X(n)(I-P)X^{-1}(j+1)f_j, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.14}$$

где P — проектор Рисса на максимальное инвариантное подпространство относительно матрицы монодромии $\bar{X}$, соответствующее собственным значениям, принадлежащих единичному кругу $B(0,\, 1)$:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S (\lambda I - \bar{X})^{-1}\, d\lambda. \tag{4.15}$$

Теорема 2 доказана.

Из доказательства теоремы следует, что для решения задачи (1.3) справедливы оценки

$$\|x_n\| \leq cF, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.16}$$

где $c > 0$ — константа, зависящая от норм матриц

$$\|A(0)\|, \|A(1)\|, \ldots \|A(N-1)\|, \ \|A^{-1}(0)\|, \|A^{-1}(1)\|, \ldots \|A^{-1}(N-1)\|.$$

Однако, как следует из частных случаев (см., например, [1], [6], [9], [11], [13]), такие оценки не являются точными, при этом константа c может быть довольно большим числом, что, возможно, будет представлять трудности при проведении численных расчетов или при решении аналогичных задач, когда коэффициенты систем задаются не точно и имеют возмущения.

В следующем параграфе мы получим более сильные оценки нормы решения задачи (1.3). В частных случаях эти оценки совпадают с неравенствами Крейна.

§ 5. Оценки решения задачи (1.3)

Для получения оценок нормы решения задачи (1.3) мы будем существенно использовать следствие из теоремы [15] (см. параграф 2), в котором выписывается N-периодическое решение системы дискретных уравнений Ляпунова (2.2), удовлетворяющее (2.3). Это решение $\{H(l)\}$ представимо в виде (2.4), (2.5):

$$H(l) = H^-(l) + H^+(l), \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Используя матрицы $H(l)$, $H^-(l)$, $H^+(l)$, в следующей теореме мы приводим оценки норм решения задачи (1.3), которые являются аналогами неравенств типа Крейна (см., например, [1], [11], [13]).

Теорема 3. *Пусть система разностных уравнений (1.2) экспоненциально дихотомична, и матричная последовательность $\{H(l)\}$ определена в (2.4), (2.5). Определим числа*

$$h = \max\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(N-1)\|\},$$

$$M^- = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^-(m)\|, \qquad M^+ = \max_{l,m=0,\dots,N} \|H^{-1}(l)\|\|H^+(m)\|.$$

Тогда для решения задачи (1.3) справедлива оценка

$$\|x_n\| \le h\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h}}\right)\sqrt{M^-}F + h\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{h}}\right)\sqrt{M^+}F, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Доказательство. В соответствии с формулой (4.14) решение задачи (1.3) будем записывать в виде

$$x_n = x_n^- + x_n^+.$$

Тогда

$$\|x_n\| \le \|x_n^-\| + \|x_n^+\|.$$

Проведем оценку первого слагаемого.

В силу (4.14) имеем

$$\|x_n^-\| \le \sum_{-\infty}^{n-1} \|X(n)PX^{-1}(j+1)f_j\| \le F \sum_{-\infty}^{n-1} \|X(n)PX^{-1}(j+1)\|, \tag{5.2}$$

где P — проектор Рисса (4.15). Введем обозначение

$$A_n = \sum_{-\infty}^{n-1} \|X(n)PX^{-1}(j+1)\|. \tag{5.3}$$

Перепишем этот ряд в следующем виде

$$A_n = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=(n-1)-(l+1)N+1}^{(n-1)-lN} \|X(n)PX^{-1}(k+1)\| \right) = \sum_{l=0}^{\infty} A_{n,l}, \tag{5.4}$$

и оценим каждое слагаемое $A_{n,l}$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle H(n)X(n)PX^{-1}(k+1)v, X(n)PX^{-1}(k+1)v\rangle,$$

где v — произвольный вектор. Учитывая, что $\{X(n)\}$ — матрицант системы разностных уравнений (1.2), последовательность $\{H(l)\}$ является решением системы дискретных уравнений Ляпунова (2.2) и $P^2 = P$, $P(I-P) = 0$, получим следующие равенства

$$\begin{aligned}
&\langle H(n)X(n)PX^{-1}(k+1)v, X(n)PX^{-1}(k+1)v\rangle \\
&= \langle H(n)A(n-1)X(n-1)PX^{-1}(k+1)v, A(n-1)X(n-1)PX^{-1}(k+1)v\rangle \\
&= \langle \left(A^*(n-1)H(n)A(n-1) \right) X(n-1)PX^{-1}(k+1)v, X(n-1)PX^{-1}(k+1)v\rangle \\
&= \langle H(n-1)X(n-1)PX^{-1}(k+1)v, X(n-1)PX^{-1}(k+1)v\rangle \\
&\quad - \langle X(n-1)PX^{-1}(k+1)v, X(n-1)PX^{-1}(k+1)v\rangle.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу неравенства

$$\begin{aligned}
&\langle H(n-1)X(n-1)PX^{-1}(k+1)v, X(n-1)PX^{-1}(k+1)v\rangle \\
&\le \|H(n-1)\| \|X(n-1)PX^{-1}(k+1)v\|^2
\end{aligned}$$

имеем

$$\langle H(n)X(n)PX^{-1}(k+1)v, X(n)PX^{-1}(k+1)v\rangle$$

$$\leq \left(1-\frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\langle H(n-1)X(n-1)PX^{-1}(k+1)v, X(n-1)PX^{-1}(k+1)v\rangle.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получим

$$\langle H(n)X(n)PX^{-1}(k+1)v, X(n)PX^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$\leq \left(1-\frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)$$
$$\times\langle H(k+1)X(k+1)PX^{-1}(k+1)v, X(k+1)PX^{-1}(k+1)v\rangle.$$

Учитывая, что $P^2 = P$, $P\bar{X} = \bar{X}P$, в силу формулы (2.4) нетрудно показать

$$\langle H(j)X(j)PX^{-1}(j)v, X(j)PX^{-1}(j)v\rangle$$
$$= \langle H^-(j)X(j)PX^{-1}(j)v, X(j)PX^{-1}(j)v\rangle = \langle H^-(j)v, v\rangle,$$

поэтому

$$\langle H(n)X(n)PX^{-1}(k+1)v, X(n)PX^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$\leq \left(1-\frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\langle H^-(k+1)v, v\rangle.$$

А поскольку все матрицы $H(l)$ являются эрмитовыми положительно определенными, то получаем оценку

$$\|X(n)PX^{-1}(k+1)v\|^2$$
$$\leq \left(1-\frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\|H^{-1}(n)\|\|H^-(k+1)\|\|v\|^2.$$

Отсюда в силу произвольности вектора v следует

$$\|X(n)PX^{-1}(k+1)\|^2$$
$$\leq \left(1-\frac{1}{\|H(k+1)\|}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\|H(n-1)\|}\right)\|H^{-1}(n)\|\|H^-(k+1)\|.$$

Следовательно, учитывая периодичность последовательности $\{H(l)\}$ и определение чисел h, M^-, получим

$$\|X(n)PX^{-1}(k+1)\| \leq \left(1-\frac{1}{h}\right)^{(n-k-1)/2}\sqrt{M^-}, \quad k+1 \leq n,$$

и отсюда

$$A_{n,j} \le \sqrt{M^-} \sum_{k=(n-1)-(j+1)N+1}^{(n-1)-jN} \left(1 - \frac{1}{h}\right)^{(n-k-1)/2}.$$

Используя эту оценку, из (5.4) получаем

$$A_n = \sqrt{M^-} \sum_{l=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{h}\right)^{l/2} = \sqrt{M^-} h \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h}}\right).$$

Тогда из (5.2), (5.3) вытекает оценка нормы первого слагаемого в (4.14)

$$\|x_n^-\| \le F\sqrt{M^-} h \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h}}\right). \tag{5.5}$$

Проведем теперь оценку нормы второго слагаемого в (4.14)

$$x_n^+ = -\sum_{j=n}^{\infty} X(n)(I-P)X^{-1}(j+1)f_j, \quad n \in Z.$$

Очевидно, имеем

$$\|x_n^+\| \le \sum_{j=n}^{\infty} \|X(n)(I-P)X^{-1}(j+1)f_j\|$$

$$\le F \sum_{j=n}^{\infty} \|X(n)(I-P)X^{-1}(j+1)\|. \tag{5.6}$$

Введем обозначение

$$B_n = \sum_{j=n}^{\infty} \|X(n)(I-P)X^{-1}(j+1)\|. \tag{5.7}$$

Перепишем этот ряд в следующем виде

$$B_n = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n+lN}^{n+(l+1)N-1} \|X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)\| \right) = \sum_{l=0}^{\infty} B_{n,l}, \tag{5.8}$$

и оценим каждое слагаемое $B_{n,l}$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle,$$

где v — произвольный вектор. Учитывая, что $\{X(n)\}$ — матрицант системы разностных уравнений (1.2), последовательность $\{H(l)\}$ является решением системы дискретных уравнений Ляпунова (2.2) и $P^2 = P$, $P(I-P) = 0$, получим следующие равенства

$$\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$

$$= \langle H(n+1)A(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, A(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$-\langle X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$

или

$$\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$= \langle H(n+1)X(n+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$-\|X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\|^2.$$

Отсюда в силу неравенства

$$\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$\le \|H(n)\|\|X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle\|^2$$

имеем

$$\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$\le \langle H(n+1)X(n+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$-\frac{1}{\|H(n)\|}\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$

или

$$\left(1+\frac{1}{\|H(n)\|}\right)\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$\le \langle H(n+1)X(n+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получим

$$\left(1+\frac{1}{\|H(n)\|}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\|H(k)\|}\right)$$
$$\times\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$\le \langle H(k+1)X(k+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(k+1)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle.$$

Учитывая, что $P^2 = P$, $P\bar{X} = \bar{X}P$, в силу формулы (2.4) можно показать

$$\langle H(j)X(j)(I-P)X^{-1}(j)v, X(j)(I-P)X^{-1}(j)v\rangle$$
$$= \langle H^+(j)X(j)(I-P)X^{-1}(j)v, X(j)(I-P)X^{-1}(j)v\rangle = \langle H^+(j)v, v\rangle.$$

Тогда будем иметь

$$\langle H(n)X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v, X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\rangle$$
$$\le \left(1+\frac{1}{\|H(n)\|}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{1}{\|H(k)\|}\right)^{-1}\langle H^+(k+1)v, v\rangle.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)v\|^2$$
$$\le \left(1+\frac{1}{\|H(n)\|}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{1}{\|H(k)\|}\right)^{-1}\|H^{-1}(n)\|\|H^+(k+1)\|\|v\|^2.$$

Поэтому в силу произвольности вектора v имеем

$$\|X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)\|^2$$
$$\le \left(1+\frac{1}{\|H(n)\|}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{1}{\|H(k)\|}\right)^{-1}\|H^{-1}(n)\|\|H^+(k+1)\|.$$

Следовательно, учитывая периодичность последоваельности $\{H(l)\}$ и определения чисел h, M^+, получаем

$$\|X(n)(I-P)X^{-1}(k+1)\| \le \left(1+\frac{1}{h}\right)^{-(n-k-1)/2}\sqrt{M^+}$$

и отсюда

$$B_{n,j} \le \sqrt{M^+}\sum_{n+lN}^{n+(l+1)N-1}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{-(n-k-1)/2}.$$

Используя эту оценку, из (5.8) получаем

$$B_n \le \sqrt{M^+}h\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{h}}\right).$$

Тогда из (5.6), (5.7) будем иметь

$$\|x_n^+\| \le F\sqrt{M^+}h\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{h}}\right).$$

Учитывая это неравенство и (5.5), получим (5.1).
Теорема 3 доказана.

В заключение приведем примеры аналогов неравенств *типа Крейна.*

I. Рассмотрим задачу вида (1.3) для системы с постоянными коэффициентами $A(n) = A$. Пусть спектр матрицы A лежит в единичном круге $B(0,1)$. Тогда дискретное уравнение Ляпунова

$$H - A^*HA = I$$

имеет единственное эрмитово решение $H = H^* > 0$. Поэтому из неравенства Крейна вытекает оценка для нормы решения $\{x_n\}$:

$$\|x_n\| \le \nu(H)\|H\|\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\|H\|}}\right) F, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эта оценка совпадает с оценкой из теоремы 3.

II. Рассмотрим задачу (1.3) для системы с периодическими коэффициентами. Предположим, что спектр матрицы монодромии $\bar{X}$ лежит в единичном круге $B(0,1)$. Поэтому, как следует из работы [11], краевая задача для системы дискретных уравнений Ляпунова

$$H(l) - A^*(l)H(l+1)A(l) = I, \quad l = 0, 1, ..., N-1,$$

$$H(0) = H(N) > 0,$$

имеет единственное эрмитово решение $\{H(l)\}$. Тогда из аналога неравенства Крейна, полученного в указанной работе, вытекает оценка для нормы решения $\{x_n\}$:

$$\|x_n\| \le \nu(H)h\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{h}}\right) F, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эта оценка совпадает с оценкой из теоремы 3.

Список литературы

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.* М.: Наука, 1970.

2. *Коваль П. И.* Приводимые системы разностных уравнений и устойчивость их решений // *Успехи мат. наук.* 1957. Т. 12, № 6. С. 143–146.

3. *Hahn W. C. Theorie und Adwendung der direkten Methode von Ljapunov.* Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer Verlag, 1959.

4. *Jury E. I.* A simplified stability criterion for linear discrete systems // *ERL Report Series.* 1961. N 60. P. 373.

5. *Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем.* М.: Мир, 1971.

6. *Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры.* Новосибирск: Научная книга, 1997.

7. *Elaydi S. N. An Introduction to Difference Equations.* New York: Springer Verlag, Inc. 1999.

8. *Bulgak A., Bulgak H. Linear Algebra.* Konya: Selcuk University, 2001.

9. *Годунов С. К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры.* Новосибирск: Научная книга, 2002.

10. *Романовский Р. К., Бельгарт Л. В., Добровольский С. М., Рогозин А. В., Троценко Г. А. Метод функций Ляпунова для почти периодических систем.* Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2015.

11. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.

12. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Асимптотическая устойчивость решений возмущенных линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 2002. Т. 43, № 3. С. 493–507.

13. *Демиденко Г. В. Матричные уравнения.* Учебное пособие. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009.

14. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // *J. Comput. Math. Optim.* 2010. V. 6, N 1. P. 1–12.

15. *Демиденко Г. В., Бондарь А. А.* Экспоненциальная дихотомия систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 2016. Т. 57, № 6. С. 1240–1254.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 19-49
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 19-49

16. *Демиденко Г. В., Бондарь А. А., Ганжаева М. Ш.* Экспоненциальная дихотомия систем разностных уравнений при возмущении коэффициентов // *Челябинский физ.-мат. журн.* 2024. Т. 9, вып. 4. С. 561–572.

17. *Булгаков А. Я., Годунов С. К.* Круговая дихотомия матричного спектра // *Сиб. мат. журн.* 1988. Т. 29, № 5. С. 59–70.

References

1. *Daleckii Ju. L., Krein M. G. Stability of Solutions to Differential Equations in Banach Space.* Providence: Amer. Math. Soc., 1974.

2. *Koval' P. I.* Reducible systems of difference equations and stability of their solutions // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1957. V. 12, N 6. P. 143–146 (Russian).

3. *Hahn W. C. Theorie und Adwendung der direkten Methode von Ljapunov.* Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer Verlag, 1959.

4. *Jury E. I.* A simplified stability criterion for linear discrete systems // *ERL Report Series.* 1961. N 60. P. 373.

5. *Halanay A., Wexler D. Qualitative Theory of Impulse Systems.* Moscow: Mir, 1971 (Russian).

6. *Godunov S. K. Modern Aspects of Linear Algebra.* Providence: Amer. Math. Soc., 1998.

7. *Elaydi S. N. An Introduction to Difference Equations.* New York: Springer Verlag, Inc. 1999.

8. *Bulgak A., Bulgak H. Linear Algebra.* Konya: Selcuk University, 2001.

9. *Godunov S. K. Lectures on Modern Aspects of Linear Algebra.* Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 2002 (Russian).

10. *Romanovskii R. K., Bel'gart L. V., Dobrovol'skii S. M., Rogozin A. V., Trotsenko G. A. The Method of Lyapunov Functions for Almost Periodic Systems.* Novosibirsk: Izdat. SO RAN, 2015 (Russian).

11. *Aidyn K., Bulgakov H. Ya., Demidenko G. V.* Numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients // *Siberian Math. J.* 2000. V. 41, N 6. P. 1005–1014.

12. *Aidyn K., Bulgakov H. Ya., Demidenko G. V.* Asymptotic stability of solutions to perturbed linear difference equations with periodic coefficients // *Siberian Math. J.* 2002. V. 43, N 3. P. 389–401.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 19-49
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 19-49

13. *Demidenko G. V. Matrix Equations.* Textbook. Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2009 (Russian).

14. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to difference equations with periodic coefficients in linear terms // *J. Comput. Math. Optim.* 2010. V. 6, N 1. P. 1–12.

15. *Demidenko G. V., Bondar A. A.* Exponential dichotomy of systems of linear difference equations with periodic coefficients // *Siberian Math. J.* 2016. V. 57, N 6. P. 969–980.

16. *Demidenko G. V., Bondar A. A., Ganzhaeva M. Sh.* Exponential dichotomy for systems of difference equations under perturbation of coefficients // *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal.* 2024. V. 9, N 4. P. 561–572 (Russian).

17. *Bulgakov H. Ya., Godunov S. K.* Circular dichotomy of a matrix spectrum // *Siberian Math. J.* 1988. T. 29, N 5. P. 734–744.

Информация об авторе

Геннадий Владимирович Демиденко, доктор физико-математических наук, профессор
SPIN 7719-1669 AuthorID: 2077
Scopus Author ID 6701652666

Анна Александровна Бондарь, старший преподаватель
SPIN 6175-6295 AuthorID: 1058291
Scopus Author ID 57192653521

Мардона Шавкат кизи Ганжаева, магистрант

Author Information

Gennadii V. Demidenko, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 7719-1669 AuthorID: 2077
Scopus Author ID 6701652666

Anna A. Bondar, Senior teacher
SPIN 6175-6295 AuthorID: 1058291
Scopus Author ID 57192653521

Mardona Sh. Ganzhaeva, Master's degree student

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 19-49
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 19-49

*Статья поступила в редакцию 10.06.2025;
одобрена после рецензирования 05.08.2024; принята к публикации
24.09.2025*

*The article was submitted 10.06.2025;
approved after reviewing 05.08.2024; accepted for publication 24.09.2025*